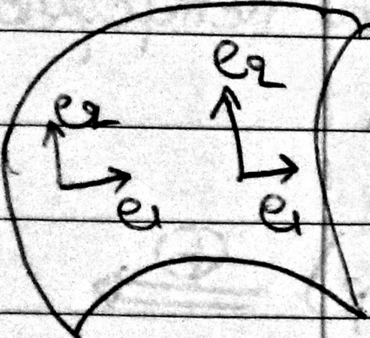
4-5-17

Πόρισμα: Αν Σ είναι ομοιομορφική με S^2, τότε κάθε διαν. πεδίο έχει ένα τουλάχιστον ιδιάζων σημείο.

• Έστω Σ συμπαγής επιφάνεια με καμπυλότητα Gauß $K>0$, τότε από Gauß-Bonnet $\Sigma \cong S^2$

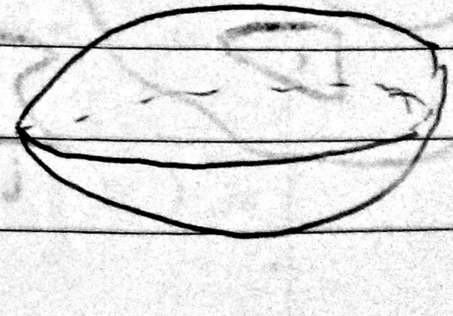
Αν $\kappa_1 > \kappa_2$

Δηλαδή, έδειξα:



Πόρισμα: Σε κάθε συμπαγή επιφάνεια με $K>0$, υπάρχει ένα τουλάχιστον p, ώστε $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ (ελλειψοειδές).



$K>0$.

ανοιχτό πρόβλημα

Εικασία Καραθεοδωρή: Σε κάθε συμπαγή επιφάνεια με $K>0$ υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία όπου $K_1=K_2$.

- Υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$, με $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$: $\gamma(t)=\gamma(t;p,v)$

ΛΗΜΜΑ (ομογένεια γεωδαισιακών)

Αν η $\gamma(t;p,v)$ ορίζεται για $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, τότε η $\gamma(t;p,\lambda v)$ $\lambda>0$, ορίζεται για $t\in\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda},\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$ και ισχύει:

$\gamma(t;p,\lambda v)=\gamma(\lambda t;p,v)$

Απόδειξη

$\gamma(t)=\gamma(t;p,v)$, $\beta(t)=\gamma(\lambda t;p,v)$

Η $\beta(t)$ είναι γεωδαισιακή που ορίζεται για $\lambda t\in(-\varepsilon,\varepsilon) \Leftrightarrow t\in\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda},\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$

και $\beta(0)=\gamma(0;p,v)=p$

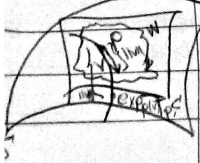
$\beta'(0)=\lambda\gamma'(0;p,v)=\lambda v$

Άρα, $\gamma(t;p,\lambda v)=\beta(t)$.

Εκθετική απεικόνιση

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια και $p\in S$. Ονομάζουμε εκθετική απεικόνιση της S στο σημείο p, την απεικόνιση

$$exp_p: W\subset T_pS\to S \text{ με } exp_p(v)=\begin{cases} p, & v=0 \\ \gamma(1;p,v), & v\neq 0 \end{cases} \quad v\in W\subset T_pS$$



$$v\neq 0:\ \gamma(1;p,v)=\gamma\left(1;p,\|v\|\frac{v}{\|v\|}\right)\overset{\text{ομογένεια}}{=}\gamma\left(1\cdot\|v\|;p,\frac{v}{\|v\|}\right)$$

Δηλαδή, $$exp_p(w)=\begin{cases} p, & w=0 \\ \gamma\left(\|w\|;p,\frac{w}{\|w\|}\right), & w\neq 0\end{cases}$$

Πρόταση: Για κάθε σημείο $p_0 \in S$, υπάρχουν αριθμοί $\delta = \delta(p_0) > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(p_0) > 0$ και περιοχή U του p_0 και διαφορίσιμη απεικόνιση:

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \Sigma \longrightarrow S, \quad \Sigma = \{ (p, v) \,/\, p \in U,\ v \in T_pS,\ \|v\| < \varepsilon \}.$$
$$(t, p, v) \longmapsto \gamma(t, p, v)$$

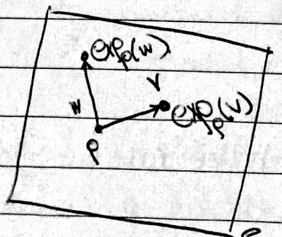
$\gamma(t, p, v)$ είναι η μοναδική γεωδ. που διέρχεται ~~με~~ από το p με ταχύτητα v

- $\gamma(t; p, \lambda v) = \gamma(\lambda t; p, v)$, με $\lambda = \dfrac{\delta(p_0)}{2}$

$t \in \left(-\dfrac{\delta}{\lambda}, \dfrac{\delta}{\lambda}\right) = (-2, 2)$

Άρα, η πρόταση γίνεται όπου δ το 2.
Δηλαδή, το W της απεικόνισης είναι ίσο $\{v, \|v\| < \varepsilon\}$, δηλαδή ένας δίσκος πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο. Επίσης, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

<u>Π.χ (Επίπεδο)</u>



$exp_p(v) = ;$

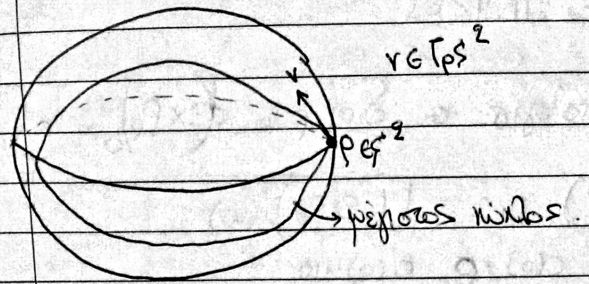
Εδώ η εκθετική είναι 1-1

$S = \Pi,\ T_pS = \Pi$

$\gamma(t; p, v) = p + tv$

Έτσι: $exp_p(v) = \begin{cases} p, & v = 0 \\ \gamma(1; p, v), & v \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} p, & v = 0 \\ p + v, & v \neq 0 \end{cases}$

π.χ (S^2)

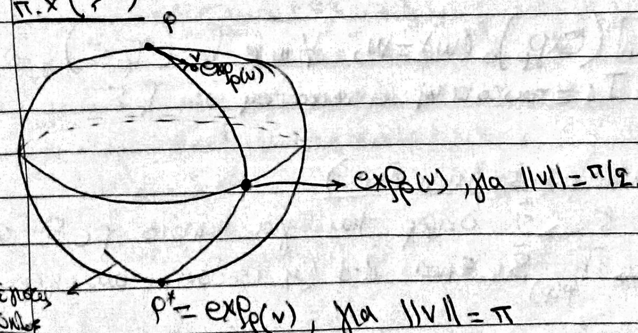


$$\gamma(t; p, v) = \cos(t\|v\|)p + \sin(t\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$$

$$\|\gamma(t; p, v)\|^2 = \cos^2(t\|v\|) + \sin^2(t\|v\|) = 1.$$

Οπότε, $$exp_p(v) = \begin{cases} p, & v = 0 \\ \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}, & v \neq 0. \end{cases}$$

π.χ (S^2)



Εδώ η εκθετική δεν είναι 1-1'.

• Αν πάρω $exp_p\big|_{B_\pi(0)}$ είναι 1-1 και διαφορομορφισμός

$B_\pi(0) = \{v \in T_pS^2 / \|v\| < \pi\}$.

Δηλαδή, $exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pS \to S$ διαφορίσιμη, όπου
$B_\varepsilon(0) = \{v \in T_pS : \|v\| < \varepsilon\}$.

Στόχος: Να υπολογίσω το διαφορικό $d(exp_p)_0 : \underbrace{T_0(T_pS)}_{T_pS} \to T_pS$

Έστω $w \in T_0(T_pS)$, θέλω $d(exp_p)_0(w)$
$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$, $c(0) = 0$, $c'(0) = w$
παίρνω $c(t) = 0 + tw$

$d(exp_p)_0(w) = \bar{c}'(0)$, $\bar{c} = exp_p \circ c$

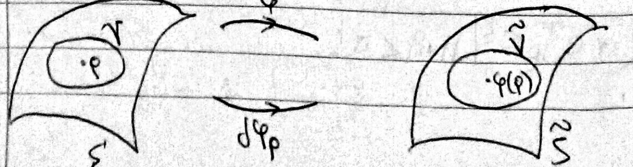
$$\bar{c}(t) = exp_p(c(t)) = exp_p(tw) = \begin{cases} p, & tw = 0 \\ \gamma(1; p, tw), & tw \neq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p, & tw = 0 \\ \gamma(t; p, w), & tw \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{c}(t) = \gamma(t; p, w) \Rightarrow \bar{c}'(0) = w$$

Δηλαδή, $d(exp_p)_0(w) = w$, $\forall w \in T_0(T_pS)$, δηλαδή
$d(exp_p)_0 = I_d \equiv$ ταυτοτική απεικόνιση στο T_pS

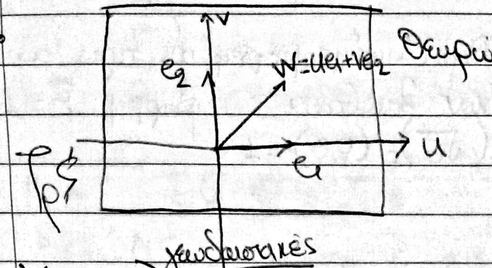
Θεώρημα (Αντίστροφης Απεικόνισης)
Έστω $\varphi : S \to \tilde{S}$ διαφορ. και για κάποιο $p \in S$ το διαφορικό
$d\varphi_p : T_pS \to T_{\varphi(p)}\tilde{S}$ είναι '1-1' (ή ισοδύναμα αντιστρέφεται), τότε

υπάρχουν ανοιχτά $V = V(p) \subset S$, $\tilde{V} = \tilde{V}(\varphi(p)) \subset \tilde{S}$ τέτοια ώστε
$\varphi|_V : V \to \tilde{V}$ να είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη είναι
επίσης διαφορίσιμη.



$\varphi|_V : V \to \tilde{V}$ διαφορομορφισμός

Συμπέρασμα: $\forall p \in S$, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, τέτοιος ώστε:
$exp_p : B_\varepsilon(0) \to exp_p(B_\varepsilon(0)) \subset S$ είναι διαφορομορφισμός
$d(exp_p)_0 = Id$ = ταυτοτική του T_pS



Θεωρώ $\{e_1, e_2\}$ ορθοκανονική βάση του T_pS

Κανονικές γεωδαισιακές συντεταγμένες

Θεωρώ το σύστημα συντ/νων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ ως
$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < \varepsilon\}$ και $X(u,v) = exp_p(ue_1 + ve_2)$

$X(u,0) = exp_p(ue_1) = \gamma(1, p, ue_1) = \gamma(u, p, e_1)$
$\boxed{X_u(0,0) = e_1}$
$X(0,v) = exp_p(ve_2) = \gamma(1, p, ve_2) = \gamma(v, p, e_2)$
$\boxed{X_v(0,0) = e_2}$

$E(0,0) = \langle X_u(0,0), X_u(0,0) \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$
$F(0,0) = \langle X_u(0,0), X_v(0,0) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$
$G(0,0) = \langle X_v(0,0), X_v(0,0) \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1.$

Γεωδαισιακές πολικές συντεταγμένες
$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \rho < \varepsilon, 0 < \theta < 2\pi\}$
$X(\rho, \theta) = exp_p(\rho\cos\theta e_1 + \rho\sin\theta e_2) = exp_p(\rho(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2))$
$= \gamma(1; p, \rho(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) = \gamma(\rho; p, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)$

• Μια περιοχή $V \subset S$ σημείου $p \in S$ καλείται κανονική $\Leftrightarrow$
$V = exp_p(U)$, $U \subset T_pS$ και $exp_p|_U : U \to V$ είναι διαφορομορφισμός

Οι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος γεωδαισιακών πολικών συν/νων είναι: $X(\rho, \theta = \sigma\tau\alpha\theta)$: ακτινικές γεωδαισιακές δια του [illegible]

$X(\rho = \sigma\tau\alpha\theta, \theta)$: γεωδαισιακοί κύκλοι κέντρου p και ακτίνας ρ.

<u>Πρόταση</u>: Η πρώτη θεμελιώδης μορφή ως προς σύστημα γεωδαισιακών πολικών συν/νων λαμβάνει την μορφή: $E = 1$, $F = 0$, $\lim_{\rho \to 0} G(\rho, \theta) = 0$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho (\rho, \theta) = 1$

<u>Απόδειξη</u>

$$E = \langle X_\rho, X_\rho \rangle = \|X_\rho\|^2 = 1 \quad \Big(\gamma(\rho, \rho, \underbrace{\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2}_{\|\dots\| = 1}) \Big)$$

$F = \langle X_\rho, X_\theta \rangle$

Οι παρα/κές καμπύλες $X(\rho, \theta = \sigma\tau\alpha\theta)$ είναι γεωδαισιακές

Η καμπύλη $X(\rho(t), \theta(t))$ είναι γεωδαισιακή <u>αν</u>

$$\begin{cases} \rho'' + \Gamma_{11}^1 (\rho')^2 + 2\Gamma_{12}^1 \rho'\theta' + \Gamma_{22}^1 (\theta')^2 = 0 \\ \theta'' + \Gamma_{11}^2 (\rho')^2 + 2\Gamma_{12}^2 \rho'\theta' + \Gamma_{22}^2 (\theta')^2 = 0 \end{cases}$$

Οι $\rho(t) = t$, $\theta(t) = \sigma\tau\alpha\theta$. επαληθεύουν το σύστημα αφού είναι γεω[illegible]

$$\Rightarrow \Gamma_{11}^1 = 0 = \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$X_{\rho\rho} = \Gamma_{11}^1 X_\rho + \Gamma_{11}^2 X_\theta + eN$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{\rho\rho}, X_\rho \rangle = \frac{1}{2} (\langle X_\rho, X_\rho \rangle)_\rho \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{\rho\rho}, X_\theta \rangle = \langle X_\rho, X_\theta \rangle_\rho - \langle X_\rho, X_{\rho\theta} \rangle = \\ \qquad = F_\rho - \frac{1}{2} \langle X_\rho, X_\rho \rangle_\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = F_\rho \Rightarrow F \text{ είναι ανεξάρτητο του } \rho \end{cases}$$

$F = \lim_{\rho\to 0} F = \lim_{\rho\to 0} \langle 0, \; \rangle = 0$

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ ο πίνακας της I ως προς $\{X_\rho, X_\theta\}$

$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$ " " " " " $\{X_u, X_v\}$

Άρα, $EG - F^2 = (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2) \cdot \left(\dfrac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(\rho,\theta)} \right)^2$ (1)

$B = C^t A C$

$\det B = \det A \cdot (\det C)^2$

$X_u = X_\rho + X_\theta \Rightarrow X_\rho = \dfrac{\partial u}{\partial \rho} X_u + \dfrac{\partial v}{\partial \rho} X_v$

$$\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} u_\rho & u_\theta \\ v_\rho & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

(1): $G = (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)\rho^2$

$\lim_{\rho\to 0} G = \lim_{\rho\to 0} \left[(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)\rho^2 \right] = 1 \cdot 0^2 = 0.$

$\sqrt{G} = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \cdot \rho$

$(\sqrt{G})_\rho = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} + \left(\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}\right)_\rho \cdot \rho$

Έτσι $\lim_{\rho\to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$

Έξοχο Θεώρημα (σε γεωδαισιακές πολικές συν/νες)

$$K = \frac{-(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} \Leftrightarrow \boxed{(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0}$$

Θεώρημα Minding (ένα είδος αντιστρόφου του έξοχου θεωρήματος)

Δυο κανονικές επιφάνειες με την ίδια σταθερή καμπυλότητα Gauß είναι τοπικά ισομετρικές.